

CONDITIONAL CORRECTNESS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION OF STRUCTURED TYPE

Umirova Dildora Isomiddin qizi

"Cyber University" State University

Email: dildoraumirova7@gmail.com

Abstract

This thesis studies the conditional correctness of a boundary value problem posed for a third-order structured-type differential equation. Boundary and Cauchy-type problems associated with higher-order differential equations are often not well-posed in the sense of Hadamard that is, even when the existence and uniqueness of a solution are guaranteed, the stability condition may fail. The thesis analyzes the causes of such ill-posedness, substantiates the concept of conditional correctness, and examines the application of a priori estimates, the method of fundamental solutions, the Green's function, and regularization techniques to ensure stability. The obtained results are of significant importance for analyzing and determining stable solutions of higher-order differential equations.

Keywords

third-order differential equation, structured model, conditional correctness, boundary value problem, ill-posed problem, regularization.

UCHINCHI TARTIBLI TUZILMALI TURDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALANING SHARTLI KORREKTLIGI

Umirova Dildora Isomiddin qizi

"Cyber University" davlat universiteti Email: dildoraumirova7@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu tezisdagi uchinchi tartibli tuzilmali (strukturaviy) differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masalaning shartli korrektiligi masalasi o'rganiladi.

Yuqori tartibli differensial tenglamalar bilan bog'liq chegaraviy va Koshi tipidagi masalalar ko'pincha Adamar ma'nosida korrekt bo'lmaydi ya'ni yechimning mavjudligi va yagonaligi ta'minlangan taqdirda ham, barqarorlik sharti buzilishi mumkin. Tezisdan bunday nokorrektlikning sabablari tahlil qilinadi, shartli korrektilik tushunchasi asoslab beriladi hamda barqarorlikni ta'minlash uchun apriori baholar, fundamental yechimlar usuli, Green funksiyasi va regulyarizatsiya usullarining qo'llanilishi ko'rib chiqiladi. Olingan natijalar yuqori tartibli differensial tenglamalarning barqaror yechimlarini tahlil qilish va aniqlash uchun muhim ahamiyatga ega.

Kalit so'zlar: uchinchi tartibli differensial tenglama, tuzilmali (strukturaviy) model, shartli korrektilik, chegaraviy masala, nokorrekt masala, regulyarizatsiya.

Matematik fizika va amaliy matematikaning muhim yo'nalishlaridan biri yuqori tartibli differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan modellarni tadqiq qilishdan iborat. Xususan, uchinchi tartibli tuzilmali differensial tenglamalar elastiklik nazariyasi, mexanika, dispers muhitlar, termofizik va to'lqin jarayonlarini modellashtirishda keng uchraydi bunday tenglamalar zanjirli reaksiyalar, egiluvchan konstruksiyalarning tebranishi yoki muhit ichidagi murakkab tarqalish jarayonlarini tavsiflashda tabiiy ravishda paydo bo'ladi. Biroq bunday tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy yoki Koshi tipidagi masalalar ko'pincha Adamar mezonlari asosida korrekt bo'lmaydi. Ya'ni boshlang'ich yoki chegaraviy ma'lumotlardagi juda kichik xatoliklar yechimning keskin o'zgarishiga olib kelishi mumkin. Shu sababli masalaning shartli korrektiligi tushunchasi muhim ahamiyat kasb etadi, va ushbu tezisdan aynan uchinchi tartibli tuzilmali differensial tenglama uchun chegaraviy masalaning shartli korrektiligi masalasi matematik jihatdan tahlil qilinadi.

Qaralayotgan model sifatida quyidagi uchinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani olamiz:

$$a_3(x) \cdot u'''(x) + a_2(x) \cdot u''(x) + a_1(x) \cdot u'(x) + a_0(x) \cdot u(x) = f(x), x \in [a, b],$$

bu yerda $a_i(x)$ ($i = 0,1,2,3$) yetarlicha silliq berilgan funksiyalar, $f(x)$ esa tashqi ta'sir funksiyasi. Tenglama uchinchi tartibli bo'lgani sababli unga uchta chegaraviy shart qo'yiladi: $u(a) = \alpha_1$, $u'(a) = \alpha_2$, $u(b) = \beta$. Bunday aralash tipdagi shart ikkita shartning bir uchda ($x = a$) va bittasining ikkinchi uchda ($x = b$) berilishi masalani na sof Koshi masalasiga, na klassik ikki nuqtali chegaraviy masalaga to'liq mos keltiradi, aynan shu "tuzilmaviy" xususiyat masalaning nomini ham belgilaydi va uning korrektilik xossalari sezilarli darajada murakkablashtiradi.

Adamar nazariyasiga ko'ra, chegaraviy masala korrekt qo'yilgan deb hisoblanishi uchun uchta shart birgalikda bajarilishi kerak: yechimning mavjudligi, yechimning yagonaligi va yechimning berilgan ma'lumotlarga nisbatan barqarorligi. Uchinchi tartibli differensial tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi yoki aralash chegaraviy masalalarda ko'pincha aynan barqarorlik sharti buziladi. Jon (John, 1960) va Ivanov (1965) ishlarida ko'rsatilganidek, $\|f - f_{\varepsilon}\| \rightarrow 0$ bo'lganda ham $\|u - u_{\varepsilon}\| \rightarrow \infty$ bo'lishi mumkin, ya'ni ma'lumotlardagi kichik xatolik yechimda cheksiz o'sishga olib kelishi mumkin. Shu sababli bunday masalalar nokorrekt (ill-posed) hisoblanadi, va bu holat aynan yuqori tartibli hamda tuzilmasi murakkablashgan tenglamalar uchun ayniqsa keskin namoyon bo'ladi, chunki tartib ortishi bilan yechimning ma'lumotlarga bog'liqligini nazorat qiluvchi operator normasi ham tezroq o'sib boradi.

Nokorrekt masalalar uchun yechimni faqat ma'lum, oldindan belgilangan sinfda izlash orqaligina shartli korrektilikka erishish mumkin. Bunda quyidagi ko'rinishdagi apriori baho mavjud bo'lishi talab etiladi:

$$\|u\|_{(C^3[a,b])} \leq M \cdot (\|f\| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta|),$$

bu yerda $M > 0$ faqat tenglama koeffitsiyentlariga bog'liq, ma'lumotlardan mustaqil doimiy son. Ushbu baho yechimning $C^3[a,b]$ fazosidagi normasini boshlang'ich ma'lumotlar normasi orqali yuqoridan chegaralab beradi, natijada ma'lumotlardagi kichik o'zgarish yechimda ham nazorat qilinadigan, chegaralangan o'zgarishga olib

keladi bu esa shartli barqarorlikning matematik mazmunini tashkil etadi. Bunday apriori bahoni olish, odatda, tenglamani mos integral tenglamaga keltirish va Gronuoll tipidagi tengsizliklarni qo'llash yoki energetik usul yordamida amalga oshiriladi.

Gomogen (bir jinsli) tenglama uchun uchta chiziqli bog'liq bo'lmagan fundamental yechim $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ mavjud bo'lsin. Shunda umumiy yechim $u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + C_3u_3(x) + u_p(x)$ ko'rinishida ifodalanadi, bu yerda $u_p(x)$ berilgan xususiy yechim. Chegaraviy shartlar yordamida C_1 , C_2 , C_3 koeffitsiyentlarni aniqlash uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi, va bu koeffitsiyentlarning ma'lumotlarga nisbatan barqarorligi mos sistemaning determinanti (Vronskian tipidagi ifoda) nolga qanchalik yaqinligiga bog'liq bo'ladi determinant kichik bo'lgan hollarda masala shartli korrektilik nuqtai nazaridan alohida ehtiyotkorlik talab qiladi, chunki koeffitsiyentlar ma'lumotlardagi kichik xatoliklarga nisbatan keskin sezgir bo'lib qoladi. Shu bois fundamental yechimlar tizimining barqarorligi masalaning umumiy shartli korrektiligi bilan chambarchas bog'liq. Agar chegaraviy masala uchun Green funksiyasi $G(x,s)$ mavjud bo'lsa, yechim integral ko'rinishda $u(x) = \int_a^b G(x,s) \cdot f(s) ds$ shaklida yoziladi. Bu tasvirlash yechim va ma'lumot orasidagi bog'liqlikni yagona, ixcham operator ko'rinishida ifodalash imkonini beradi, biroq Green funksiyasining o'zi tenglamaning tuzilishiga (xususan, tip almashinuvi yoki koeffitsiyentlarning maxsus nuqtalariga) bog'liq holda keskin o'sishga yoki singulyarlikka ega bo'lishi mumkin. Bunday hollarda $G(x,s)$ ning normasi (masalan, $\iint |G(x,s)|^2 dx ds$ integrali) katta bo'lib qoladi, bu esa yechimning ma'lumotlarga bog'liqligini yomonlashtiradi va masalaning nokorrektiligini yanada kuchaytiradi. Shu sababli Green funksiyasi orqali yechimni qurish bilan bir qatorda, uning normasini baholash masalaning shartli korrektiligini tekshirishning ajralmas qismi hisoblanadi.

Shartli korrektilikni amaliy ta'minlash maqsadida bir qator regularizatsiya usullari qo'llaniladi. Birinchisi Tixonov regularizatsiyasi bo'lib, unda dastlabki masala o'rniga

$u_\alpha = \arg \min_u (\|Lu - f\|^2 + \alpha \|u\|^2)$ minimallashtirish masalasi qaraladi, bu yerda $\alpha > 0$ regularizatsiya parametri; α ni ma'lumotlardagi xatolik darajasiga mos tanlash orqali regularizatsiyalangan yechim haqiqiy yechimga yaqinlashishi ta'minlanadi. Ikkinchisi spektral filtratsiya usuli, unda yechimning spektral (masalan, Furye yoki xos funksiyalar bo'yicha) yoyilmasidagi yuqori chastotali, beqaror komponentlar filtrlanib tashlanadi va faqat barqaror, past chastotali qism saqlab qolinadi. Uchinchisi iteratsion usullar, xususan Landveber iteratsiyasi: $u_{(k+1)} = u_k - \gamma \cdot L^*(Lu_k - f)$, bu yerda $\gamma > 0$ qadam parametri, $L^* = L$ operatorining qo'shmasi; bu usulda iteratsiyalar soni k ning o'zi tabiiy regularizatsiya parametri vazifasini bajaradi iteratsiyani erta to'xtatish yechimni beqaror yuqori chastotali komponentlardan himoya qiladi.

Yuqorida bayon etilgan tahlil shuni ko'rsatadiki, uchinchi tartibli tuzilmali differensial tenglama uchun qo'yilgan chegaraviy masala umumiy holda Adamar ma'nosida korrekt bo'lmaydi, ya'ni ma'lumotlardagi juda kichik xatoliklar yechimning keskin o'zgarishiga olib kelishi mumkin bu esa uni ill-posed masalalar sinfiga kiritishga asos bo'ladi. Shu bilan birga, shartli korrektlik tushunchasi va unga mos apriori baholarning mavjudligi masalaning barqarorligini ta'minlovchi asosiy omillardan biri ekanligi ko'rsatildi. Fundamental yechimlar va Green funksiyasi orqali yechimni ifodalash imkoniyatlari, ularning barqarorlikka ta'siri bilan birgalikda o'rganildi, shuningdek Tixonov regularizatsiyasi, spektral filtratsiya va iteratsion (Landveber) usullar yordamida nokorrektlikni kamaytirish va yechimning amaliy barqarorligini ta'minlash mumkinligi asoslab berildi. Olingan natijalar uchinchi va undan yuqori tartibli differensial tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy va Koshi tipidagi masalalarni yechishda nazariy asos bo'lib xizmat qiladi hamda matematik fizika, mexanika va muhandislik masalalarida uchraydigan noaniq va beqaror modellarni tahlil qilish, ularning barqaror yechimlarini qurishda qo'llanishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. John F. Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound. *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 551–585.
2. Иванов В.К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе. *Дифференц. уравнения*, 1(1), 1965, 131–136.
3. Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. *Дифференц. уравнения*, 2(3), 1966, 382–390.
4. Hajiyeu I.O., Umirova D.I. Uchinchi tartibli tuzilmali tenglama uchun chegaraviy masalaning shartli korrektiligi. *Academic Research in Educational Sciences*, 4(2), 2023.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.
6. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics*. – Wiley, 1989.